R E P U B L I Q U E  F R A N Ç A I S

PCT/FR00/01979

~~00 7862~~

23 AOUT 2000

INPI
INSTITUT NATIONAL DE LA PROPRIETE INDUSTRIELLE

EJ4 18/1

FR00/1979

# BREVET D'INVENTION

REC'D 26 SEP 2000
WIPO PCT

## CERTIFICAT D'UTILITÉ - CERTIFICAT D'ADDITION

## COPIE OFFICIELLE

Le Directeur général de l'Institut national de la propriété industrielle certifie que le document ci-annexé est la copie certifiée conforme d'une demande de titre de propriété industrielle déposée à l'Institut.

Fait à Paris, le 14 AVR. 2000

Pour le Directeur général de l'Institut
national de la propriété industrielle
Le Chef du Département des brevets

**PRIORITY DOCUMENT**
SUBMITTED OR TRANSMITTED IN
COMPLIANCE WITH
RULE 17.1(a) OR (b)

Martine PLANCHE

INSTITUT NATIONAL DE LA PROPRIETE INDUSTRIELLE
SIEGE
26 bis, rue de Saint Petersbourg
75800 PARIS Cédex 08
Téléphone : 01 53 04 53 04
Télécopie : 01 42 93 59 30

ETABLISSEMENT PUBLIC NATIONAL CREE PAR LA LOI N° 51-444 DU 19 AVRIL 1951

INSTITUT NATIONAL DE LA PROPRIETE INDUSTRIELLE

26 bis, rue de Saint Pétersbourg
75800 Paris Cedex 08
Telephone : 01 53 04 53 04 Télécopie : 01 42 93 59 30

# BREVET D'INVENTION, CERTIFICAT D'UTILITÉ

Code de la propriété intellectuelle-Livre VI

cerfa N° 55 -1328

## REQUÊTE EN DÉLIVRANCE

Confirmation d'un dépôt par télécopie ___

Cet imprimé est à remplir à l'encre noire en lettres capitales

Réservé à l'INPI

DATE DE REMISE DES PIÈCES : 9 JUIL 1999
N° D'ENREGISTREMENT NATIONAL : 9908949
DÉPARTEMENT DE DÉPÔT : 75 INPI PARIS
DATE DE DÉPÔT : 08 JUIL. 1999

1 NOM ET ADRESSE DU DEMANDEUR OU DU MANDATAIRE À QUI LA CORRESPONDANCE DOIT ÊTRE ADRESSÉE

CABINET BONNET-THIRION
12, avenue de la Grande Armée
75017 PARIS

n°du pouvoir permanent : BIF114002/FR/MLA — références du correspondant — téléphone : 01 53 81 17 00

2 DEMANDE Nature du titre de propriété industrielle

X brevet d'invention — ___ demande divisionnaire — ___ demande initiale ___ brevet d'invention ___ certificat d'utilité n° ___ date ___

___ certificat d'utilité — ___ transformation d'une demande de brevet européen

Établissement du rapport de recherche : ___ différé X immédiat

Le demandeur, personne physique, requiert le paiement échelonné de la redevance : ___ oui ___ non

Titre de l'invention (200 caractères maximum)

Procédé de cryptographie mis en oeuvre entre deux entités échangeant des informations

3 DEMANDEUR (S) n° SIREN ___ code APE-NAF ___

Nom et prénoms (souligner le nom patronymique) ou dénomination

OBERTHUR CARD SYSTEMS SAS

Forme juridique : Société par actions simplifiées

Nationalité (s) : FRANCAISE

Adresse (s) complète (s) : 102 Bd Malesherbes 75017 - Paris — Pays : FRANCE

En cas d'insuffisance de place, poursuivre sur papier libre ☐

4 INVENTEUR (S) Les inventeurs sont les demandeurs ☐ oui ☒ non Si la réponse est non, fournir une désignation séparée

5 RÉDUCTION DU TAUX DES REDEVANCES ☐ requise pour la 1ère fois ☐ requise antérieurement au dépôt : joindre copie de la décision d'admission

6 DÉCLARATION DE PRIORITÉ OU REQUÊTE DU BÉNÉFICE DE LA DATE DE DÉPÔT D'UNE DEMANDE ANTÉRIEURE

| pays d'origine | numéro | date de dépôt | nature de la demande |
|---|---|---|---|

7 DIVISIONS antérieures à la présente demande n° ___ date ___ n° ___ date ___

8 SIGNATURE DU DEMANDEUR OU DU MANDATAIRE (nom et qualité du signataire)

Joël BARBIN LE BOURHIS N°92.1010
CABINET BONNET-THIRION

SIGNATURE DU PRÉPOSÉ À LA RÉCEPTION | SIGNATURE APRÈS ENREGISTREMENT DE LA DEMANDE À L'INPI

BA 540 A/200298

INPI
INSTITUT NATIONAL DE LA PROPRIETE INDUSTRIELLE

DEPARTEMENT DES BREVETS
BIFI14002/FR/MLA
26bis, rue de Saint-Petersbourg
75800 Paris Cédex 08
Tél. : 01 53 04 53 04 - Télécopie : 01 42 93 59 30

# BREVET D'INVENTION, CERTIFICAT D'UTILITE

## DÉSIGNATION DE L'INVENTEUR

Si le demandeur n'est pas l'inventeur ou l'unique inventeur

N° D'ENREGISTREMENT NATIONAL
99 08 949

TITRE DE L'INVENTION :

Procédé de cryptographie mis en oeuvre entre deux entités échangeant des informations

LE(S) SOUSSIGNÉ(S)

CABINET BONNET-THIRION
12 avenue de la Grande-Armée
75017 PARIS

DÉSIGNE(NT) EN TANT QU'INVENTEUR(S) (indiquer nom, prénoms, adresse et souligner le nom patronymique) :

KNUDSEN Erik
16 rue Alexandre Dumas
75011 PARIS

**NOTA :** A titre exceptionnel, le nom de l'inventeur peut être suivi de celui de la société à laquelle il appartient (société d'appartenance) lorsque celle-ci est différente de la société déposante ou titulaire.

Date et signature (s) du (des) demandeur (s) ou du mandataire

9 juillet 1999

Joël BARBIN LE BOURHIS N°92.1010
CABINET BONNET-THIRION

BA 113/140897

"Procédé de cryptographie mis en œuvre entre deux entités échangeant des informations"

L'invention se rapporte à un procédé de cryptographie mis en œuvre entre deux entités échangeant des informations à travers un canal de communication non sécurisé, par exemple un réseau câblé ou hertzien et permettant d'assurer la confidentialité et l'intégrité des transferts d'informations entre ces deux entités. L'invention concerne plus particulièrement un perfectionnement aux cryptosystèmes mettant en œuvre des calculs sur une courbe elliptique. Le perfectionnement permet principalement de réduire les temps de calcul.

On connaît un protocole de cryptographie, plus particulièrement utilisé pour réaliser un échange de clefs sécurisé entre deux entités. Il est connu sous l'appellation "Echange de Clefs de Diffie-Hellmann" ou "ECDH". Sa mise en œuvre nécessite l'utilisation d"un groupe au sens mathématique du terme. Une courbe elliptique du type :

$$y^2 + xy = x^3 + \alpha x^2 + \beta$$

peut constituer un groupe utilisable dans un tel procédé ;

On sait que si P= (x,y) appartient à la courbe elliptique E, on peut définir un "produit" ou "multiplication scalaire " du point P de E par un entier m. Cette opération est définie comme suit :

$$[m]\,P = P + P + P \ldots + P \text{ (m fois)}$$

On sait que dans un algorithme du type "ECDH", on utilise la multiplication par 2 d'un point P choisi d'une telle courbe elliptique. Cette opération s'appelle "doublement de point" et s'inscrit dans un processus itératif de doublement-et-addition. Une telle multiplication par 2 requiert du temps.

La partie la plus lente du protocole d'Echange de Clés de Diffie-Hellman (ECDH) est la multiplication d'un point de la courbe non connu à l'avance par un scalaire aléatoire. On ne considère ici que les courbes elliptiques définies sur un corps de caractéristique 2 ; c'est un choix répandu pour les implémentations, car l'addition dans un tel corps correspond à l'opération "'ou exclusif".

Il est connu que la multiplication par un scalaire peut être accélérée pour les courbes définies sur un corps de faible cardinalité en utilisant le morphisme de Frobenius. On peut choisir les courbes de sorte qu'aucune des attaques

connues ne s'applique à elles. Cependant, il est évidemment préférable, au moins sur le plan du principe, de pouvoir choisir la courbe que l'on veut utiliser dans une classe de courbes aussi générale que possible. La méthode décrite dans l'invention s'applique, dans sa version la plus rapide, à la moitié des courbes elliptiques. De plus, d'un point de vue cryptographique, cette moitié est la meilleure. Avant de donner le principe de la méthode, on rappelle les concepts de base.

Soit n un entier donné, $F_{2^n}$ le corps de $2^n$ éléments, et $\overline{F_{2^n}}$ sa clôture algébrique. Soit O le point à l'infini. On appelle courbe elliptique E non supersingulière définie sur $F_{2^n}$ l'ensemble :

$$E = \{(x,y) \in \overline{F_{2^n}} \times \overline{F_{2^n}} \mid y^2 + xy = x^3 + \alpha x^2 + \beta\} \cup \{O\} \quad \alpha, \beta \in F_{2^n},\ \beta \neq 0$$

Les éléments de E sont habituellement appelés "points". Il est bien connu que E peut être doté d'une structure de groupe abélien en prenant le point à l'infini comme élément neutre. Dans ce qui suit, on considère le sous-groupe fini des points rationnels de E, défini par :

$$E(F_{2^n}) = \{(x,y) \in F_{2^n} \times F_{2^n} \mid y^2 + xy = x^3 + \alpha x^2 + \beta\} \cup \{O\} \quad \alpha, \beta \in F_{2^n},\ \beta \neq 0$$

N étant l'ensemble des entiers naturels, pour tout $m \in N$, on définit dans E l'application "multiplication par m" par :

$$[m] : E \rightarrow E$$

$$P \rightarrow P + \ldots\ldots + P \text{ (m fois) et } \forall P \in E : [O]P = O$$

On note E[m] le noyau de cette application. Les points du groupe E[m] sont appelés les points de m-torsion de E. La structure de groupe des points de m-torsion est bien connue.

En se limitant au cas où m est une puissance de 2, on a :

$$\forall k \in N : E[2^k] \cong Z/2^k Z$$

où Z est l'ensemble des entiers relatifs.

Comme $E(F_{2^n})$ est un sous-groupe fini de E, il existe $k' \geq 1$ tel que $E[2^k]$ est contenu dans $E(F_{2^n})$ si et seulement si $k \leq k'$. Si on se limite aux courbes elliptiques E pour lesquelles k'=1, la structure de $E(F_{2^n})$ est :

$$E(F_{2^n}) = G \times \{O, T_2\}$$

où G est un groupe d'ordre impair et $T_2$ désigne le point unique d'ordre 2 de E. On dit qu'une telle courbe a une 2- torsion minimale.

On est maintenant en mesure d'expliquer le but de l'invention. La multiplication par deux, n'est pas injective lorsqu'elle est définie sur E ou $E(F_{2^n})$, car elle a pour noyau : $E[2] = \{O, T_2\}$.

Par ailleurs, si on réduit le domaine de définition de la multiplication par 2 à un sous-groupe d'ordre impair $G \subset E(F_{2^n})$, la multiplication par 2 devient bijective.

Il en résulte que la multiplication par 2 admet sur ce sous-groupe une application inverse que nous appellerons division par 2 :

$$[1/2] : G \rightarrow G$$

$$P \rightarrow Q \text{ tel que : } [2]Q = P$$

On note [1/2] P le point de G auquel l'application de doublement fait correspondre le point P.

Pour tout $k \geq 1$, on écrit :

$$\left[\frac{1}{2^k}\right] = \left[\frac{1}{2}\right] \circ \left[\frac{1}{2}\right] \circ \ldots\ldots \circ \left[\frac{1}{2}\right]$$

Pour représenter k compositions de l'application de division par 2 avec elle-même.

De façon générale l'invention concerne donc un procédé de cryptographie mis en œuvre entre deux entités échangeant des informations à travers un canal de communication non sécurisé, du type comprenant au moins une phase opératoire consistant à multiplier un point d'ordre impair d'une courbe elliptique non supersingulière par un entier, caractérisé en ce qu'une telle phase opératoire comprend des additions et des divisions par deux de points de ladite courbe elliptique; où l'addition de points est une opération connue, et la division par deux d'un point P est définie comme le point unique D d'ordre impair tel que $[2]D=P$, un tel point étant noté $\left[\frac{1}{2}\right] P$, et l'opération de division par 2 : $\left[\frac{1}{2}\right]$.

L'application de division par 2 est intéressante pour la multiplication scalaire d'un point d'une courbe elliptique pour la raison suivante : si l'on travaille

en coordonnées affines, il est possible de remplacer toutes les multiplications de point par 2 d'une multiplication scalaire par des divisions de point par 2.

La division par 2 d'un point est bien plus rapide à calculer que sa multiplication par 2. D'un point de vue cryptographique, il est bon d'avoir à choisir parmi le plus grand nombre de courbes possible, et on a coutume d'utiliser une courbe pour laquelle la 2-torsion de $E(F_{2^n})$ est minimale ou isomorphique à Z/4Z. Pour un corps $F_{2^n}$ donné, les courbes elliptiques de 2-torsion minimale constituent exactement la moitié de l'ensemble des courbes elliptiques définies sur $F_{2^n}$. C'est pourquoi, bien qu'elle ne soit pas totalement générale, la méthode décrite s'applique, dans sa version la plus rapide, à une bonne partie des courbes intéressantes en cryptographie. Elle est toujours applicable dans le cas où les éléments du corps sont représentés dans une base normale. Dans le cas d'une base polynomiale, l 'espace mémoire requis est de l'ordre de $O(n^2)$ bits.

On va montrer comment calculer [1/2] $P \in G$ à partir de $P \in G$. Puis on montrera comment remplacer les doublements de points par des divisions par 2 pour exécuter une multiplication par un scalaire.

On utilisera la représentation affine habituelle d'un point : P=(x,y) et la représentation : $(x, \lambda_p)$ avec $\lambda_p = x+y / x$

On tire de la deuxième représentation $y = x (x + \lambda_p)$ qui n'utilise qu'une multiplication.

En procédant ainsi, pour multiplier un point par un scalaire, on économise les multiplications en calculant les résultats intermédiaires à l'aide de la représentation $(x, \lambda_p)$ et on ne détermine la coordonnée de la représentation affine qu'en fin de calcul.

La division par deux d'un point P s'obtient de la façon suivante :

Soit à calculer [1/2] P à partir de P. On considère pour cela les deux points de E :

$$P = (x,y) = (x, x (x + \lambda_p))$$

$$\text{et } Q = (u,v) = (u, u (u + \lambda_Q))$$

tels que : [2]Q= P

Les formules de multiplication par 2 connues donnent

$$\lambda_Q = u + v/u \qquad (1)$$

$$x = \lambda_Q^2 + \lambda_Q + \alpha \qquad (2)$$

$$y = (x+u)\,\lambda_Q + x + v \qquad (3)$$

Multipliant (1) par u et reportant la valeur de v ainsi obtenue dans (3), ce système devient :

$$v = u\,(u + \lambda_Q)$$

$$\lambda_Q^2 + \lambda_Q = \alpha + x$$

$$y = (x + u)\,\lambda_Q + x + u^2 + u\,\lambda_Q = u^2 + x\,(\lambda_Q + 1)$$

ou, puisque $y = x\,(x + \lambda_p)$ :

$$\lambda_Q^2 + \lambda_Q = \alpha + x \qquad (i)$$

$$u^2 = (x\,(\lambda_Q + 1) + y = (\lambda_Q + \lambda_p + x + 1) \qquad (ii)$$

$$v = u\,(u + \lambda_Q) \qquad (iii)$$

En partant de $P = (x,y) = (x, x\,(x + \lambda_p))$ en coordonnées affines ou en représentation $(x, \lambda_p)$, ce système d'équations détermine les deux points :

$$[1/2]\,P \in G \text{ et } [1[/2]\,P + T_2 \in E(F_{2^n}) \setminus G$$

qui donnent P par multiplication par 2. La propriété qui suit permet de la distinguer.

Soit E une courbe elliptique à 2-torsion minimale, et $P \in E(F_{2^n}) = G \times \{O, T_2\}$ l'un de ses éléments d'ordre impair.

Soit $Q \in \{[1/2]\,P, [1/2]\,P + T_2\}$ et $Q_1$ l'un des deux points de E tels que $[2]Q_1 = Q$.

On a la condition nécessaire et suffisante :

$$Q + [1/2]P \Leftrightarrow Q_1 \in E(F_{2^n}) \qquad (a)$$

On en déduit qu'il est possible de tester si $Q = [1/2]\,P$ en appliquant les formules (i), (ii) et (iii) à Q et en vérifiant si l'un de points obtenus appartient à $E(F_{2^n})$.

Ce procédé peut être étendu à une courbe elliptique arbitraire $E(F_{2^n}) = G \times E[2^k]$. Pour cela on applique k fois les formules (i), (ii) et (iii) : la 1ère fois à Q, pour obtenir $Q_1$, tel que $[2]\,Q_1 = Q$; la ième fois à $Q_{i-1}$ pour obtenir un point $Q_i$, tel que $[2]\,Q_i = Q_{i-1}$. Le point résultat $Q_k$ sera de la forme

$\left[\frac{1}{2^{k-1}}\right] P + T_{2^{k-1}}$ si et seulement si Q = [1/2]P + $T_2$ et il sera de la forme

$\left[\frac{1}{2^{k-1}}\right] P + T_{2^i}$ avec $0 \leq i \leq k$ si et seulement si Q = [1/2]P. On a donc la condition nécessaire et suffisante :

$$Q = [1/2]P \Leftrightarrow Q_K \in E(F_{2^n})$$

Ce procédé est évidemment long si k est grand.

La relation (a) montre que l'on peut savoir si Q = [1/2]P ou Q = [1/2]P + $T_2$ en regardant si les coordonnées de $Q_1$, appartiennent à $F_{2^n}$ ou à un sur-corps de $F_{2^n}$. Comme $Q_1$ est déterminé par les équations (i), (ii) et (iii), nous avons à étudier les opérations utilisées dans la résolution de ces équations qui ne sont pas internes au corps, mais ont leur résultat dans un sur-corps de $F_{2^n}$. Le seul cas possible est celui de la résolution de l'équation du 2nd. degré (i) : on doit aussi calculer une racine carrée pour calculer la 1ère coordonnée de $Q_1$, mais en caractéristique 2 la racine carrée est une opération interne au corps. On a donc :

$$Q = (u, v) = [1/2]\, P \Leftrightarrow \exists \lambda \in F_{2^n} : \lambda^2 + \lambda = \alpha + u$$

Cette condition nécessaire et suffisante s'écrit aussi, puisque la racine carrée est interne au corps :

$$Q = (u, v) = [1/2]\, P \Leftrightarrow \exists \lambda \in F_{2^n} : \lambda^2 + \lambda = \alpha^2 + u^2$$

La relation précédente permet d'optimiser l'algorithme énoncé ci-dessous dans les cas où le temps de calcul de la racine carrée n'est pas négligeable.

Pour $P \in G$, les 2 solutions de (i) sont $\lambda_{[1/2]P}$ et $\lambda_{[1/2]P} + 1$, et on déduit de (ii) que les 1ères coordonnées des points associés sont u et $(u + \sqrt{x})$. On peut donc en déduire un algorithme permettant de calculer [1/2]P de la façon suivante :

Si $F_{2^n}$ est un corps fini de $2^n$ éléments, $E(F_{2^n})$ est le sous-groupe d'une courbe elliptique E, défini par :

$$E(F_{2^n}) = \{(x,y) \in F_{2^n} \times F_{2^n} \mid y^2 + xy = x^3 + \alpha x^2 + \beta\} \cup \{O\} \quad \alpha, \beta \in F_{2^n},\ \beta \neq O,$$

et $E[2^k]$ est l'ensemble des points P de ladite courbe elliptique tels que P, additionné $2^k$ fois à lui même donne l'élément neutre O avec k entier supérieur ou égal à 1, alors, un point P = (x,y) de ladite courbe elliptique donne par ladite

division par deux le point $\left[\frac{1}{2}\right]$ P= ($u_o$; $v_o$) de ladite courbe elliptique, obtenu en effectuant les opérations suivantes :

- on cherche une première valeur $\lambda_o$ telle que $\lambda_o^2 + \lambda_o = \alpha + x$
- on calcule une seconde valeur $u_o^2$ telle que $u_o^2 = x (\lambda_o + 1) + y$
- si k vaut 1, on cherche si l'équation : $\lambda^2 + \lambda = \alpha^2 + u_o^2$ a des solutions dans $F_{2^n}$,
- dans l'affirmative on calcule ladite division par deux par :

$$u_o = \sqrt{u_0^2}$$

$$v_o = u_o (u_o + \lambda_o)$$

et $\left[\frac{1}{2}\right] P = (u_o, v_o)$

- dans la négative, on ajoute x à ladite deuxième valeur $u_o^2$ et on ajoute 1 à ladite première valeur $\lambda_o$ pour calculer ladite division par deux comme dans l'opération précédente;
- si k est plus grand que 1, on effectue un calcul itératif consistant à :

chercher une valeur $\lambda_i$, telle que $\lambda_i^2 + \lambda_i = \alpha + u_{i-1}$

puis calculer la valeur $u^2_i$ telle que $u^2_i = u_{i-1} (\lambda_i + \lambda_{i-1} + u_{i-1} + 1)$

en incrémentant i à partir de i=1 jusqu'à obtenir la valeur $u_{k-1}^2$

- on cherche si l'équation $\lambda^2 + \lambda = \alpha^2 + u^2_{k-1}$ a des solutions dans $F_{2^n}$
- dans l'affirmative on calcule ladite division par deux par :

$$u_o = \sqrt{u_0^2}$$

$$v_o = u_o (u_o + \lambda_o)$$

et $\left[\frac{1}{2}\right] P = (u_o, v_o)$

- dans la négative, on ajoute x à ladite deuxième valeur $u_o^2$ et on ajoute 1 à ladite première valeur $\lambda_o$ pour calculer ladite division par deux comme dans l'opération précédente.

Si on choisit de représenter le point $\left[\frac{1}{2}\right]P = (u_o, v_o)$ de la courbe elliptique par $(u_o, \lambda_o)$ avec $\lambda_o = u_0 + v_o/u$, alors l'algorithme devient :

- on cherche une première valeur $\lambda_o$ telle que $\lambda_o^2 + \lambda_o = \alpha + x$
- on calcule une seconde valeur $u_o^2$ telle que : $u_o^2 = x(\lambda_o + 1) + y$,
- si k vaut 1, on cherche si l'équation : $\lambda^2_o + \lambda_o = \alpha^2 + u^2_o$ a des solutions dans $F_{2^m}$,
- dans l'affirmative on calcule ladite division par deux par :

$$u_o = \sqrt{u_0^2}$$

et : $\left[\frac{1}{2}\right]P = (u_o, \lambda_o)$

- dans la négative, on ajoute x à ladite deuxième valeur $u_o^2$ et on ajoute 1 à ladite première valeur $\lambda_o$ pour calculer ladite division par deux comme dans l'opération précédente ;
- si k est plus grand que 1, on effectue un calcul itératif consistant à :

chercher une valeur $\lambda_i$, telle que $\lambda_i^2 + \lambda_i = \alpha + u_{i-1}$

puis calculer la valeur $u_i^2$ telle que $u_i^2 = u_{i-1}(\lambda_i + \lambda_{i-1} + u_{i-1} + 1)$

en incrémentant i à partir de i = 1jusqu'à obtenir la valeur $u^2_{k-1}$

- on cherche si l'équation $\lambda^2 + \lambda = \alpha^2 + u^2_{k-1}$ a des solutions dans $F_{2^m}$
- dans l'affirmative on calcule ladite division par deux par :

$$u_o = \sqrt{u_0^2}$$

et $\left[\frac{1}{2}\right]P = (u_o, \lambda_o)$

- dans la négative, on ajoute x à ladite deuxième valeur $u_o^2$ et on ajoute 1 à ladite première valeur $\lambda_o$ pour calculer ladite division par deux comme dans l'opération précédente.

Si on choisit de représenter le point P = (x,y) par ( x, $\lambda_p$) en posant $\lambda_p$ = x+y/x qui donne par ladite division par deux le point $\left[\frac{1}{2}\right]P = (u_o, v_o)$ de ladite courbe elliptique alors l'algorithme devient :

- on cherche une première valeur $\lambda_o$ telle que $\lambda_o^2 + \lambda_o = \alpha + x$
- on calcule une seconde valeur $u_o^2$ telle que $u_o^2 = x(\lambda_o + \lambda_p + x + 1)$
- si k vaut 1, on cherche si l'équation : $\lambda^2 + \lambda = \alpha^2 + u_o^2$ a des solutions dans $F_{2^n}$,
- dans l'affirmative on calcule ladite division par deux par :

$u_o = \sqrt{u_0^2}$

$v_o = u_o (u_o + \lambda_o)$

et : $\left[\frac{1}{2}\right]P = (u_o, v_o)$

- dans la négative, on ajoute x à ladite deuxième valeur $u_o^2$ et on ajoute 1 à ladite première valeur $\lambda_o$ pour calculer ladite division par deux comme dans l'opération précédente;
- si k est plus grand que 1, on effectue un calcul itératif consistant à :

chercher une valeur $\lambda_i$, telle que $\lambda_i^2 + \lambda_i = \alpha + u_{i-1}$

puis calculer la valeur $u^2_i$ telle que $u^2_i = u_{i-1}(\lambda_i + \lambda_{i-1} + u_{i-1} + 1)$

en incrémentant i à partir de i=1 jusqu'à obtenir la valeur $u^2_{k-1}$

- on cherche si l'équation $\lambda^2 + \lambda = \alpha^2 + u^2_{k-1}$ a des solutions dans $F_{2^n}$
- dans l'affirmative on calcule ladite division par deux par :

$u_o = \sqrt{u_0^2}$

$v_o = u_o (u_o + \lambda_o)$

et $\left[\frac{1}{2}\right]P = (u_o, v_o)$

- dans la négative, on ajoute x à ladite deuxième valeur $u_o^2$ et on ajoute 1 à ladite première valeur $\lambda_o$ pour calculer ladite division par deux comme dans l'opération précédente.

Enfin, si on choisit de représenter le point P= (x,y) par $(x, \lambda_p)$ avec $\lambda_p = x + y/x$ qui donne par ladite division par deux le point $\left[\frac{1}{2}\right]P = (u_o, v_o)$ de la courbe elliptique représenté par $(u_o, \lambda_o)$ avec $\lambda_o = u_o + v_0/u_0$ alors l'algorithme devient :

- on cherche une première valeur $\lambda_o$ telle que $\lambda_o^2 + \lambda_o = \alpha + x$
- on calcule une seconde valeur $u_o^2$ telle que $u_o^2 = x(\lambda_o + \lambda_p + x + 1)$,
- si k vaut 1, on cherche si l'équation : $\lambda^2 + \lambda = \alpha^2 + u_o^2$ a des solutions dans $F_{2^n}$,
- dans l'affirmative on calcule ladite division par deux par :

$$u_o = \sqrt{u_0^2}$$

et $\left[\frac{1}{2}\right]P = (u_o, \lambda_o)$

- dans la négative, on ajoute x à ladite deuxième valeur $u_o^2$ et on ajoute 1 à ladite première valeur $\lambda_o$ pour calculer ladite division par deux comme dans l'opération précédente ;
- si k est plus grand que 1, on effectue un calcul itératif consistant à :

chercher une valeur $\lambda_i$, telle que $\lambda_i^2 + \lambda_i = \alpha + u_{i-1}$

puis calculer la valeur $u^2_i$ telle que $u_i^2 = u_{i-1}(\lambda_i + \lambda_{i-1} + u_{i-1} + 1)$

en incrémentant i à partir de i=1 jusqu'à obtenir la valeur $u^2_{k-1}$

- on cherche si l'équation $\lambda^2 + \lambda = \alpha^2 + u^2_{k-1}$ a des solutions dans $F_{2^n}$
- dans l'affirmative on calcule ladite division par deux par :

$$u_o = \sqrt{u_0^2}$$

et $\left[\frac{1}{2}\right]P = (u_o, \lambda_o)$

- dans la négative, on ajoute x à ladite deuxième valeur $u_o^2$ et on ajoute 1 à ladite première valeur $\lambda_o$ pour calculer ladite division par deux comme dans l'opération précédente.

On va maintenant décrire comment effectuer rapidement le test, la résolution de l'équation du second degré, et le calcul de la racine carrée dans l'algorithme de division d'un point par 2. On considérera les deux cas en base normale et polynomiale.

Les résultats en base normale sont connus. On peut considérer $F_{2^n}$ comme espace vectoriel à n dimensions sur $F_2$. Dans une base normale, un élément du corps est représenté par :

$$x = \sum_{i=0}^{n-1} x_i \beta^{2^i} \qquad x_i \in \{0,1\}$$

où $\beta \in F_{2^n}$ est choisi tel que : $\{\beta, \beta^2, ..., \beta^{2^{n-1}}\}$ est une base $F_{2^n}$. Dans une base normale, la racine carrée se calcule par un décalage circulaire gauche, et l'élévation au carré par un décalage circulaire droit. Les temps de calcul correspondants sont donc négligeables.

Si l'équation du second degré : $\lambda^2 + \lambda = x$ a ses solutions dans $F_{2^n}$, une solution est alors donnée par :

$$\lambda = \sum_{i=1}^{n-1} \lambda_i \beta^{2^i} \quad \text{avec : } \lambda_i = \sum_{k=1}^{i} x_i \qquad 1 \le i \le n-1$$

Le temps de calcul de $\lambda$ est négligeable devant le temps de calcul d'une multiplication ou d'une inversion dans le corps. Comme le temps de calcul d'une solution de l'équation du second degré est négligeable, on peut effectuer le test de la manière suivante : calculer un candidat $\lambda$ à partir de x et tester si $\lambda^2 + \lambda = x$. Si ce n'est pas le cas, l'équation n'a pas de solution dans $F_{2^n}$.

En base polynomiale, on utilise la représentation :

$x = \sum_{i=0}^{n-1} x_i T^i$ avec $x_i \in \{0,1\}$. La racine carrée de x peut être calculée en stockant l'élément $\sqrt{T}$ si l'on remarque que :

- dans un corps de caractéristique 2, la racine carrée est un morphisme du corps,

$$\sqrt{\sum_{i \text{ pair}} x_i T^i} = \sum_{i \text{ pair}} x_i T^{\frac{i}{2}}$$

Regroupant dans x les puissances paires et impaires de T et prenant la racine carrée, il vient :

$$\sqrt{x} = \sum_{i \text{ pair}} x_i T^{\frac{i}{2}} + \sqrt{T} \sum_{i \text{ impair}} x_i T^{\frac{i-1}{2}}$$

ainsi, pour calculer une racine carrée, il suffit de "réduire" deux vecteurs de moitié, et d'exécuter ensuite une multiplication d'une valeur précalculée par un

élément de longueur n/2. C'est pourquoi le temps de calcul d'une racine carrée dans une base polynomiale est équivalent à la moitié du temps de calcul d'une multiplication dans le corps.

Pour le test et la résolution de l'équation du second degré, considérons $F_{2^n}$ comme un espace vectoriel à n dimensions sur $F_2$ . L'application F définie par :

$$F : F_{2^n} \rightarrow F_{2^n}$$

$$\lambda \rightarrow \lambda^2 + \lambda$$

est alors un opérateur linéaire de noyau {0, 1}

Pour un x donné, l'équation: $\lambda^2 + \lambda = x$ a ses solutions dans $F_{2^n}$ si et seulement si le vecteur x est dans l'image de F. $\mathrm{Im}(F)$ est un sous-espace de $F_{2^n}$ à n -1 dimensions. Pour une base donnée de $F_{2^n}$, et le produit scalaire correspondant, il existe un seul vecteur non trivial orthogonal à tous les vecteurs de $\mathrm{Im}(F)$. Soit w ce vecteur. On a :

$$\exists \lambda \in F_{2^n} : \lambda^2 + \lambda = x \Leftrightarrow x \bullet w = 0$$

Ainsi l'exécution du test peut se faire en additionnant les composantes de x auxquelles correspondent des composantes de w égales à 1. Le temps d'exécution de ce test est négligeable.

Pour la résolution de l'équation du 2nd .degré : $F(\lambda) = \lambda^2 + \lambda = x$ dans une base polynomiale, on propose une méthode simple et directe imposant le stockage d'une matrice n x n. Pour cela, on cherche un opérateur linéaire G tel que :

$$\forall x \in \mathrm{Im}(F) : F(G(x)) = (G(x))^2 + G(x) = x$$

Soit $\gamma \in F_{2^n}$ un vecteur tel que $\gamma \notin \mathrm{Im}(F)$ et définissons G par:

$$G = \tilde{F}^{-1} \quad \text{avec} \quad \tilde{F}(T^i) = \begin{cases} \gamma & \text{si : } i = 0 \\ F(T^i) & \text{si : } 1 \le i \le n-1 \end{cases}$$

Etant donné $x = \sum_{i=1}^{n-1} x_i F(T^i) \in \mathrm{Im}(F)$ alors G(x) est solution de l'équation du 2nd degré. Une implémentation consiste à précalculer la matrice représentant G dans la base $\{1, T, \ldots\ldots, T^{n-1}\}$. En caractéristique 2, la multiplication d'une matrice par un vecteur se réduit à l'addition des colonnes de la matrice

auxquelles correspondent un composante du vecteur égale à 1. Il s'ensuit que cette méthode de résolution d'une équation du 2nd degré consomme en moyenne n/2 additions dans le corps $F_{2^n}$.

On décrit ci-dessous l'application des principes exposés à la multiplication scalaire

Soient $P \in E(F_{2^n})$ un point d'ordre r impair, c un entier aléatoire et m la partie entière de $\log_2(r)$. Calculons le produit [c]P d'un point par un scalaire en utilisant l'application de division d'un point par 2.

On démontre que :

Pour tout entier c; il existe un nombre rationnel de la forme :

$$\sum_{i=0}^{m} \frac{c_i}{2^i} \qquad c_i \in \{0,1\}$$

tel que :

$$c \equiv \sum_{i=0}^{m} \frac{c_i}{2^i} \pmod{r}$$

Soit <P> le groupe cyclique généré par P. Comme on a l'isomorphisme d'anneaux:

$$P \approx Z/rZ$$

$$[k]P \rightarrow k$$

On peut calculer la multiplication scalaire par:

$$[c]P = \sum_{i=0}^{m} \left[\frac{c_i}{2}\right] P$$

en utilisant des divisions par 2 et des additions. L'algorithme bien connu de doublement-addition peut être utilisé pour ces calculs. Il suffit pour cela de remplacer dans l'algorithme les doublements par des divisions par 2. Il faut exécuter $\log_2(r)$ divisions par 2 et, en moyenne, $1/2 \log_2(r)$ additions. Il existe des améliorations à l'algorithme de doublement-addition qui ne demandent que $1/3 \log_2(r)$ additions en moyenne.

Par conséquent une multiplication scalaire précitée utilisant une division par deux telle que définie ci-dessus est obtenue par les opérations suivantes :

- si ledit scalaire de la multiplication est noté S, on choisit m+1 valeurs

So... Sm ∈ {0,1} pour définir S par :

$$S = \sum_{i=0}^{m} S_i \left( \frac{r+1}{2} \right)^i$$

- r étant l'ordre impair précité et m étant l'entier unique compris entre $\log_2(r) - 1$ et $\log_2(r)$,

- on calcule la multiplication scalaire [S]P d'un point P de ladite courbe elliptique par le scalaire S par application d'un algorithme consistant à déterminer la suite de points ($Q_{m+1}$, $Q_m$..., $Q_i$..., $Q_o$) de ladite courbe elliptique E telle que :

$$Q_{m+1} = O \text{ (élément neutre)}$$

$$Q_i = [S_i]P + \left[ \frac{1}{2} \right] Q_{i+1} \text{ avec } o \leq i \leq m$$

- le calcul du dernier point $Q_o$ de ladite suite donnant le résultat [S] P de ladite multiplication scalaire.

Pour additionner le point P initial à un résultat intermédiaire $Q = \left[ \frac{1}{2} \right] Q_i$, on utilise l'algorithme suivant, qui est l'algorithme traditionnel, légèrement modifié:

Entrée: P = (x,y) en coordonnées affines et Q = (u, u(u + $\lambda_Q$ )) représenté par (u, $\lambda_Q$)

Sortie: P + Q = (s, t) en coordonnées affines

algorithme:

1. Calculer: $\lambda = \dfrac{y + u(u + \lambda_Q)}{x + u}$
2. Calculer: $s = \lambda^2 + \lambda + a + x + u$
3. Calculer: $t = (s + x)\lambda + s + y$
4. Résultat: (s, t)

Cet algorithme utilise 1 inversion, 3 multiplications, et 1 racine carrée.

Le gain de temps obtenu en remplaçant les opérations de multiplication par 2 par des divisions par 2 est important. En coordonnées affines, la multiplication par 2 et l'addition demandent toutes deux: une inversion, deux multiplications, et une racine carrée. Si le scalaire de la multiplication par un scalaire est représenté par un vecteur de bits de longueur m et de k composantes non nulles, les opérations pour la multiplication scalaire demandent :

| opération | doublement et addition | Division par 2 et addition |
|---|---|---|
| inversions | m + k | k |
| multiplications | 2m + 2k | m + 3k |
| carrés | m + k | k |
| résolution $\lambda^2+\lambda=a+x$ | 0 | m |
| racines carrées | 0 | m |
| tests | 0 | m |

Ainsi, en utilisant la division par 2, on économise m inversions, m-k multiplications, et m carrés, au prix de m résolutions du $2^{nd}$.degré, m racines carrées et m tests.

En base polynomiale, on peut obtenir une amélioration en temps d'exécution voisine de 50%.

En base normale, on estime le temps de calcul de la racine carrée, du test et de la résolution d'équation du $2^{nd}$. degré négligeable devant le temps de calcul d'une multiplication ou d'une inversion. En supposant en outre que le temps de calcul d'une inversion est équivalent au temps de calcul de 3 multiplications, on arrive à une amélioration du temps d'exécution de 55%.

La figure unique illustre schématiquement une application possible des algorithmes décrits ci-dessus, mis en œuvre entre deux entités A et B échangeant des informations à travers un canal de communication non sécurisé. En l'occurrence, ici l'entité A est une carte à microcircuit et l'entité B est une serveur distant. Une fois mis en relation l'une avec l'autre par ledit canal de communication, les deux entités vont appliquer un protocole de construction d'une clef commune. Pour ce faire :

- l'entité A possède une clef secrète a
- l'entité B possède une clef secrète b

Elles doivent élaborer une clef secrète x connue d'elles seules, à partir d'une clef publique constituée par un point P d'ordre impair r d'une courbe elliptique E choisie et non supersingulière.

Le protocole mis en œuvre est du type de Diffie-Hellman en remplaçant les "multiplications par deux " habituelles dites doublements de point par l'opération dite de "division par deux", selon l'invention décrite ci-dessus.

Pour ce faire, l'algorithme est le suivant :

- la première entité (par exemple A) calcule la multiplication scalaire [a]P et envoie le point résultat à la seconde entité,

- la seconde entité (B) calcule la multiplication scalaire [b]P et envoie le point résultat à la première entité,

- les deux entités calculent respectivement un point commun (C) = (x,y) de ladite courbe elliptique (E) en effectuant respectivement les multiplications scalaires [a] ([b]P) et [b] ([a]P), toutes deux égales à [a.b]P,

- les deux entités choisissent comme clef commune la coordonnée x dudit point commun (C) obtenu par ladite multiplication scalaire [a.b]P, au moins l'une des multiplications scalaires précédentes, et de préférence toutes, étant effectuée à l'aide de divisions par deux prédéfinies.

Une autre application possible mettant en jeu l'invention est susceptible d'être mise en œuvre entre deux entités A et B. Il s'agit d'un protocole de signature d'un message M transmis entre A et B via un canal non sécurisé. Le but de ce protocole, connu dans ses grandes lignes, est d'apporter la certitude que le message reçu par l'une des entités a bien été émis par celle avec laquelle elle correspond.

Pour ce faire, l'entité émettrice (par exemple A) possède deux clefs permanentes, l'une secrète et l'autre publique. Une autre clef publique est constituée par un point P d'ordre impair r d'une courbe elliptique E choisie, non supersingulière. Les opérations mises en jeu impliquent des divisions par deux, au sens défini ci-dessus.

Selon un exemple possible :

- la première entité (A) possédant ladite paire de clefs permanentes construit une paire de clefs à utilisation unique, l'une (g) étant choisie arbitrairement et l'autre, [g] P résultant d'une multiplication scalaire de ladite clef (g) choisie arbitrairement par le point P public de ladite courbe elliptique, les coordonnées de cette clef ([g]P) étant notées (x,y) avec $2 \leq g \leq r-2$,

- la première entité (A) convertit le polynome x de ladite clef à utilisation unique [g]P = (x,y) en un entier i dont la valeur binaire est représentée par la séquence des coefficients binaires dudit polynôme x,

- ladite première entité (A) calcule une signature (c,d) du message (M) de la façon suivante :

$c = i$ modulo r

$d = g^{-1} (M + ac)$ modulo r,

- ladite première entité envoie ledit message (M) et ladite signature (c, d) à la seconde entité ; à réception

- ladite seconde entité (B) vérifie si les éléments de ladite signature (c,d) appartiennent chacun à l'intervalle [1, r-1],

- dans la négative, déclare la signature non valide et stoppe

- dans l'affirmative, ladite seconde entité (B) calcule trois paramètres :

$h = d^{-1}$ modulo r

$h_1 = Mh$ modulo r

$h_2 = ch$ modulo r

- ladite seconde entité calcule un point T de ladite courbe elliptique par la somme des multiplications scalaires des points P et Q par les deux derniers paramètres cités :

$T = [h_1] P + [h_2] Q$

si le point résultant T est l'élément neutre, ladite seconde entité déclare la signature non valide et stoppe.

sinon, considérant le point T de coordonnées x' et y' : T = (x',y'),

- ladite seconde entité (B) convertit le polynôme x' de ce point en un entier i' dont la valeur binaire est représentée par la séquence des coefficients binaires dudit polynôme x',

- ladite seconde entité (B) calcule c' = i' modulo r et,

- vérifie que c' = c pour valider ladite signature ou l'invalider dans le cas contraire, au moins une opération de multiplication scalaire précitée et, de préférence toutes, étant effectuée à l'aide de divisions par deux prédéfinies.

## REVENDICATIONS

1. Procédé de cryptographie mis en œuvre entre deux entités échangeant des informations à travers un canal de communication non sécurisé, du type comprenant au moins une phase opératoire consistant à multiplier un point d'ordre impair d'une courbe elliptique non supersingulière par un entier, caractérisé en ce qu'une telle phase opératoire comprend des additions et des divisions par deux de points de ladite courbe elliptique où l'addition de points est une opération connue, et la division par deux d'un point P est définie comme le point unique D d'ordre impair tel que [2]D = P, un tel point étant noté $\left[\frac{1}{2}\right]P$, et l'opération de division par 2 : $\left[\frac{1}{2}\right]$

2. Procédé selon la revendication 1, où $F_{2^n}$ est un corps fini de $2^n$ éléments, $E(F_{2^n})$ est le sous-groupe d'une courbe elliptique E, défini par :

$E(F_{2^n}) = \{(x,y) \in F_{2^n} \times F_{2^n} \mid y^2 + xy = x^3 + \alpha x^2 + \beta\} \cup \{O\} \quad \alpha, \beta \in F_{2^n},\ \beta \neq 0$

et $E[2^k]$ est l'ensemble des points P de ladite courbe elliptique tels que P, additionné $2^k$ fois à lui-même donne l'élément neutre *O*, avec k entier supérieur ou égal à 1, caractérisé en ce qu'un point P =(x,y) de ladite courbe elliptique donne par ladite division par deux le point $\left[\frac{1}{2}\right]P = (u_o, v_o)$ de ladite courbe elliptique, obtenu en effectuant les opérations suivantes :

- on cherche une première valeur $\lambda_o$ telle que $\lambda_o^2 + \lambda_o = \alpha + x$
- on calcule une seconde valeur $u_o^2$ telle que $u_o^2 = x(\lambda_o + 1) + y$
- si k vaut 1, on cherche si l'équation : $\lambda^2 + \lambda = \alpha^2 + u^2_o$ a des solutions dans $F_{2^n}$,
- dans l'affirmative on calcule ladite division par deux par :

$u_o = \sqrt{u_0^2}$

$v_o = u_o (u_o + \lambda_o)$

et $\left[\frac{1}{2}\right]P = (u_o, v_o)$

- dans la négative, on ajoute x à ladite deuxième valeur $u_o^2$ et on ajoute 1 à ladite première valeur $\lambda_o$ pour calculer ladite division par deux comme dans l'opération précédente;
- si k est plus grand que 1, on effectue un calcul itératif consistant à :

chercher une valeur $\lambda_i$, telle que $\lambda_i^2 + \lambda_i = \alpha + u_{i-1}$

puis calculer la valeur $u^2_i$ telle que $u^2_i = u_{i-1}(\lambda_i + \lambda_{i-1} + u_{i-1} + 1)$

en incrémentant i à partir de i = 1 jusqu'à obtenir la valeur $u^2_{k-1}$

- on cherche si l'équation $\lambda^2 + \lambda = \alpha^2 + u^2_{k-1}$ a des solutions dans $F_{2^n}$
- dans l'affirmative on calcule ladite division par deux par :

$$u_o = \sqrt{u_0^2}$$

$$v_o = u_o (u_o + \lambda_o)$$

et $\left[\frac{1}{2}\right]P = (u_o, v_o)$

- dans la négative, on ajoute x à ladite deuxième valeur $u_o^2$ et on ajoute 1 à ladite première valeur $\lambda_o$ pour calculer ladite division par deux comme dans l'opération précédente.

3. Procédé selon la revendication 1 où : $F_{2^n}$ est un corps fini de $2^n$ éléments, $E(F_{2^n})$ est le sous-groupe d'une courbe elliptique E, défini par :

$$E(F_{2^n}) = \{(x,y) \in F_{2^n} \times F_{2^n} \mid y^2 + xy = x^3 + \alpha x^2 + \beta\} \cup \{O\} \quad \alpha, \beta \in F_{2^n}, \ \beta \neq 0$$

et $E[2^k]$ est l'ensemble des points P de ladite courbe elliptique tels que P, additionné $2^k$ fois à lui même donne l'élément neutre *O*, avec k entier supérieur ou égal à 1, caractérisé en ce qu'un point P = (x,y) de ladite courbe elliptique donne par ladite division par deux le point $\left[\frac{1}{2}\right]P = (u_o, \lambda_o)$

avec $\lambda_o = u_o + v_o/u_o$ obtenu en effectuant les opérations suivantes :

- on cherche une première valeur $\lambda_o$ telle que $\lambda_o^2 + \lambda_o = \alpha + x$
- on calcule une seconde valeur $u_o^2$ telle que : $u_o^2 = x(\lambda_o + 1) + y$
- si k vaut 1, on cherche si l'équation : $\lambda^2 + \lambda = \alpha^2 + u_o^2$ a des solutions dans $F_{2^n}$,
- dans l'affirmative on calcule ladite division par deux par :

$$u_o = \sqrt{u_0^2}$$

et $\left[\frac{1}{2}\right]P = (u_o, \lambda_o)$

- dans la négative, on ajoute x à ladite deuxième valeur $u_o^2$ et on ajoute 1 à ladite première valeur $\lambda_o$ pour calculer ladite division par deux comme dans l'opération précédente ;
- si k est plus grand que 1, on effectue un calcul itératif consistant à :

chercher une valeur $\lambda_i$, telle que $\lambda_i^2 + \lambda_i = \alpha + u_{i-1}$

puis calculer la valeur $u_i^2$ telle que $u_i^2 = u_{i-1}(\lambda_i + \lambda_{i-1} + u_{i-1} + 1)$

en incrémentant i à partir de i = 1 jusqu'à obtenir la valeur $u^2_{k-1}$

- on cherche si l'équation $\lambda^2 + \lambda = \alpha^2 + u^2_{k-1}$ a des solutions dans $F_{2^n}$
- dans l'affirmative on calcule ladite division par deux par :

$u_o = \sqrt{u_0^2}$ et $\left[\frac{1}{2}\right]P = (u_o, \lambda_o)$

- dans la négative, on ajoute x à ladite deuxième valeur $u_o^2$ et on ajoute 1 à ladite première valeur $\lambda_o$ pour calculer ladite division par deux comme dans l'opération précédente.

4. Procédé selon la revendication 1 où :

$F_{2^n}$ est un corps fini de $2^n$ éléments, $E(F_{2^n})$ est le sous-groupe d'une courbe elliptique E, défini par :

$$E(F_{2^n}) = \{(x,y) \in F_{2^n} \times F_{2^n} \mid y^2 + xy = x^3 + \alpha x^2 + \beta\} \cup \{O\} \quad \alpha, \beta \in F_{2^n}, \ \beta \neq 0$$

et $E[2^k]$ est l'ensemble des points P de ladite courbe elliptique tels que P, additionné $2^k$ fois à lui même donne l'élément neutre O avec k entier supérieur ou égal à 1, caractérisé en ce qu'un point P = (x,y) de ladite courbe elliptique représenté par $(x,\lambda_p)$ avec $\lambda_p = x + y/x$ donne par ladite division par deux le point $\left[\frac{1}{2}\right]P = (u_o, v_o)$ de ladite courbe elliptique obtenu en effectuant les opérations suivantes :

- on cherche une première valeur $\lambda_o$ telle que $\lambda_o^2 + \lambda_o = \alpha + x$
- on calcule une seconde valeur $u_o^2$ telle que : $u_o^2 = x(\lambda_o + \lambda_p + x + 1)$,
- si k vaut 1, on cherche si l'équation : $\lambda^2 + \lambda = \alpha^2 + u_o^2$ a des solutions dans $F_{2^n}$,
- dans l'affirmative on calcule ladite division par deux par :

$u_o = \sqrt{u_0^2}$

$v_o = u_o (u_o + \lambda_o)$

et $\left[\frac{1}{2}\right] P = (u_o, v_o)$

- dans la négative, on ajoute x à ladite deuxième valeur $u_o^2$ et on ajoute 1 à ladite première valeur $\lambda_o$ pour calculer ladite division par deux comme dans l'opération précédente ;
- si k est plus grand que 1, on effectue un calcul itératif consistant à :

chercher une valeur $\lambda_i$, telle que $\lambda_i^2 + \lambda_i = \alpha + u_{i-1}$

puis calculer la valeur $u_i^2$ telle que $u_i^2 = u_{i-1} (\lambda_i + \lambda_{i-1} + u_{i-1} + 1)$

en incrémentant i à partir de i =1jusqu'à obtenir la valeur $u^2_{k-1}$

- on cherche si l'équation $\lambda^2 + \lambda = \alpha^2 + u^2_{k-1}$ a des solutions dans $F_{2^n}$ dans l'affirmative on calcule ladite division par deux par :

$u_o = \sqrt{u_0^2}$

$v_o = u_o (u_o + \lambda_o)$

et $\left[\frac{1}{2}\right] P = (u_o, v_o)$

- dans la négative, on ajoute x à ladite deuxième valeur $u_o^2$ et on ajoute 1 à ladite première valeur $\lambda_o$ pour calculer ladite division par deux comme dans l'opération précédente.

5. Procédé selon la revendication 1 où : $F_{2^n}$ est un corps fini de $2^n$ éléments, $E(F_{2^n})$ est le sous-groupe d'une courbe elliptique E, défini par :

$E(F_{2^n}) = \{(x,y) \in F_{2^n} \times F_{2^n} \mid y^2 + xy = x^3 + \alpha x^2 + \beta\} \cup \{O\}$ $\alpha, \beta \in F_{2^n}$, $\beta \neq 0$

et $E[2^k]$ est l'ensemble des points P de ladite courbe elliptique tels que P, additionné $2^k$ fois à lui même donne l'élément neutre O, avec k entier supérieur ou égal à 1, caractérisé en ce qu'un point P = (x,y) de ladite courbe elliptique représenté par $(x,\lambda_p)$ avec $\lambda_p = x + y/x$ donne par ladite division par deux le point

$\left[\frac{1}{2}\right] P = (u_o, v_o)$ de ladite courbe elliptique représenté par

$(u_o, \lambda_o)$, avec $\lambda_o = u_o + v_o/u_o$ , obtenu en effectuant les opérations suivantes :

- on cherche une première valeur $\lambda_o$ telle que $\lambda_o^2 + \lambda_o = \alpha + x$
- on calcule une seconde valeur $u_o^2$ telle que : $u_o^2 = x(\lambda_o + \lambda_p + x + 1)$,
- si k vaut 1, on cherche si l'équation : $\lambda^2 + \lambda = \alpha^2 + u_o^2$ a des solutions dans $F_{2^n}$,
- dans l'affirmative on calcule ladite division par deux par :

$$u_o = \sqrt{u_0^2}$$

et $\left[\frac{1}{2}\right]P = (u_o, \lambda_o)$

- dans la négative, on ajoute x à ladite deuxième valeur $u_o^2$ et on ajoute 1 à ladite première valeur $\lambda_o$ pour calculer ladite division par deux comme dans l'opération précédente;
- si k est plus grand que 1, on effectue un calcul itératif consistant à :

chercher une valeur $\lambda_i$, telle que $\lambda_i^2 + \lambda_i = \alpha + u_{i-1}$

puis calculer la valeur $u_i^2$ telle que $u_i^2 = u_{i-1}(\lambda_i + \lambda_{i-1} + u_{i-1} + 1)$

en incrémentant i à partir de i = 1jusqu'à obtenir la valeur $u^2_{k-1}$

- on cherche si l'équation $\lambda^2 + \lambda = \alpha^2 + u^2_{k-1}$ a des solutions dans $F_2^n$
- dans l'affirmative on calcule ladite division par deux par :

$$u_o = \sqrt{u_0^2}$$

et $\left[\frac{1}{2}\right]P = (u_o, \lambda_o)$

- dans la négative, on ajoute x à ladite deuxième valeur $u_o^2$ et on ajoute 1 à ladite première valeur $\lambda_o$ pour calculer ladite division par deux comme dans l'opération précédente.

6. Procédé selon l'une des revendications précédentes, caractérisé en ce qu'il s'agit d'un protocole de construction d'une clef commune à partir de deux clefs secrètes appartenant respectivement aux deux entités précitées et d'une clef publique constituée par un point P d'ordre impair r d'une courbe elliptique E choisie et non supersingulière.

7. Procédé selon la revendication 6, caractérisé en ce que, de façon connue en soi, a et b étant les clefs secrètes d'une première et d'une seconde entités, respectivement

- la première entité calcule la multiplication scalaire [a]P et envoie le point résultat à la seconde entité,

- la seconde entité calcule la multiplication scalaire [b]P et envoie le point résultat à la première entité,

- les deux entités calculent respectivement un point commun C = (x,y) de ladite courbe elliptique (E) en effectuant respectivement les multiplications scalaires [a] ([b]P) et [b] ([a]P), toutes deux égales à [a.b]P,

- les deux entités choisissent comme clef commune la coordonnée (x) dudit point commun (C) obtenu par ladite multiplication scalaire [a.b]P, au moins l'une des multiplications scalaires précédentes, et de préférence toutes, étant effectuée à l'aide de divisions par deux prédéfinies.

8. Procédé selon l'une des revendications 1 à 5, caractérisé en ce qu'il s'agit d'un protocole de signature entre deux entités à partir d'une paire de clefs permanentes appartenant à l'une des entités, l'une secrète (a) et l'autre publique (Q), résultant de la multiplication scalaire de la clef secrète (a) par une autre clef publique constituée par un point (P) d'ordre impair r d'une courbe elliptique (E) choisie et non supersingulière.

9. Procédé selon la revendication 8, caractérisé par les opérations suivantes :

- la première entité (A) possédant ladite paire de clefs permanentes construit une paire de clefs à utilisation unique, l'une (g) étant choisie arbitrairement et l'autre [g]P résultant d'une multiplication scalaire de ladite clef (g) choisie arbitrairement par le point P public de ladite courbe elliptique, les coordonnées de cette clef ([g]P) étant notées (x,y) avec $2 \leq g \leq r-2$,

- la première entité (A) convertit le polynome x de ladite clef à utilisation unique [g]P = (x,y) en un entier i dont la valeur binaire est représentée par la séquence des coefficients binaires dudit polynome x,

- ladite première entité (A) calcule une signature (c,d) du message (M) de la façon suivante :

$c = i \text{ modulo } r$

$d = g^{-1} (M + ac) \text{ modulo } r$,

- ladite première entité envoie ledit message (M) et ladite signature (c, d) à la seconde entité ; à réception

- ladite seconde entité (B) vérifie si les éléments de ladite signature (c,d) appartiennent chacun à l'intervalle [1, r-1],

- dans la négative, déclare la signature non valide et stoppe,

- dans l'affirmative, ladite seconde entité (B) calcule trois paramètres :

$h = d^{-1}$ modulo r

$h_1 = Mh$ modulo r

$h_2 = ch$ modulo r

- ladite seconde entité calcule un point T de ladite courbe elliptique par la somme des multiplications scalaires des points P et Q par les deux derniers paramètres cités :

$T = [h_1] P + [h_2] Q$

si le point résultant T est l'élément neutre, ladite seconde entité déclare la signature non valide et stoppe,

sinon, considérant le point T de coordonnées x' et y' : T = (x',y'),

- ladite seconde entité (B) convertit le polynôme x' de ce point en un entier i' dont la valeur binaire est représentée par la séquence des coefficients binaires dudit polynôme x',

-ladite seconde entité (B) calcule c' = i' modulo r et,

- vérifie que c' = c pour valider ladite signature ou l'invalider dans le cas contraire, au moins une opération de multiplication scalaire précitée et, de préférence toutes, étant effectuée à l'aide de divisions par deux prédéfinies.

10. Procédé selon la revendication 7 ou 9, caractérisé en ce qu'une multiplication scalaire précitée utilisant des divisions par deux est obtenue par les opérations suivantes :

- si ledit scalaire de la multiplication est noté S, on choisit m+1 valeurs $S_0 \ldots S_m \in \{0,1\}$ pour définir S par :

$$S = \sum_{i=0}^{m} S_i \left( \frac{r+1}{2} \right)^i$$

r étant l'ordre impair précité et m étant l'entier unique compris entre $\log_2(r) - 1$ et $\log_2(r)$,

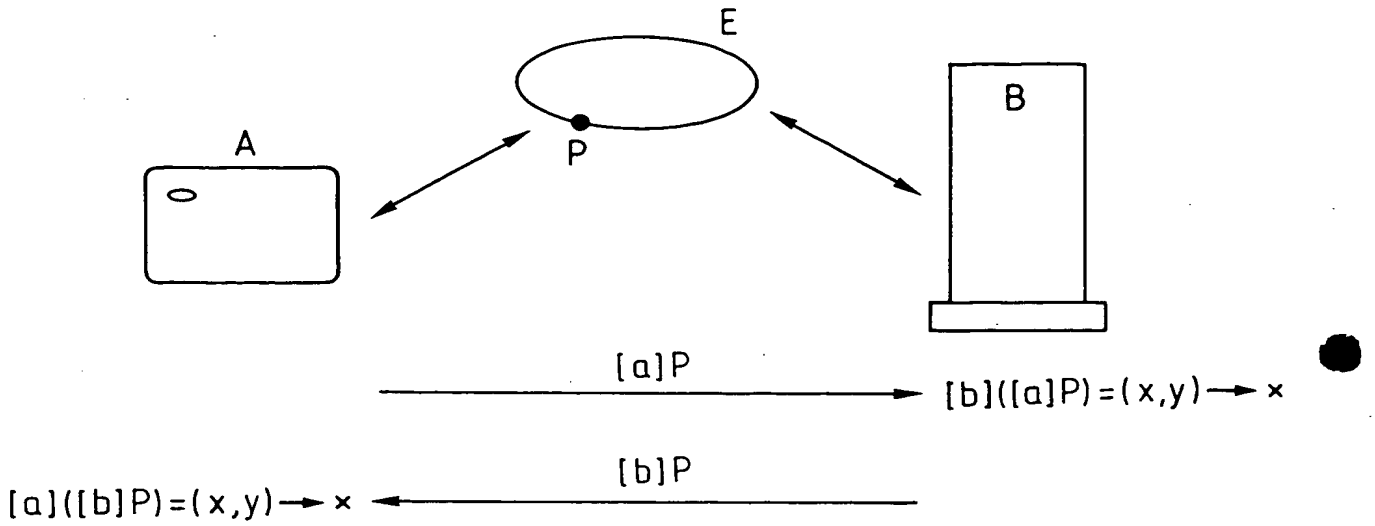
on calcule la multiplication scalaire [S]P d'un point P de ladite courbe elliptique par le scalaire S par application d'un algorithme consistant à

déterminer la suite de points ($Q_{m+1}$, $Q_m$..., $Q_i$..., $Q_o$) de ladite courbe elliptique E telle que :

$Q_{m+1} = O$ (élément neutre)

$$Q_i = [S_i]P + \left[\frac{1}{2}\right] Q_{i+1} \text{ avec } o \leq i \leq m$$

le calcul du dernier point $Q_o$ de ladite suite donnant le résultat [S] P de ladite multiplication scalaire.


E
A
P
B
[a]P
[b]([a]P)=(x,y)→x
[b]P
[a]([b]P)=(x,y)→x